Lösungsalgorithmus

- Cluedo -

Tim Wambach < t i m [at] wambach . e u >

Einleitung

Cluedo ist ein Brettspiel, bei dem es darum geht, geschickt seine Gegenspieler auszufragen und auf Basis der gewonnenen Informationen:

- welche Karte wurde mir gezeigt
- welche Karte wurde von einem anderen Spieler vermutlich einem anderen Spieler gezeigt
- welche Karte konnte von welchem Spieler nicht gezeigt werden

Rückschlüsse zu gewinnen, welche Karten allen teilnehmenden Spielern fehlen bzw. vorher abgelegt wurden. Über ein Algorithmus soll dem Spieler geholfen werden, alle vorhanden Informationen abzulegen und auszuwerten.

Um dieses Problem zu lösen, müssen zunächst die Mengen und Notationen formal beschrieben werden. Daraufhin kann auf dieser Datenbasis gearbeitet werden um am Ende die Lösungsmenge zu bilden.

Mengen und Notationen

$T: \textit{Mögliche Täter}$
$W: \textit{Mögliche Waffen}$
$R: \textit{Mögliche Räume / Orte}$
$S: \textit{Teilnehmende Spieler}$

$E: \textit{Die Menge aller eindeutigen Informationen}$
$M: \textit{Die Menge aller mehrdeutigen Informationen}$
$N: \textit{Die Menge von negationalen Informationen}$

$I: E \cup M$

Innerhalb der Mengen wird der 4-tupel (b_0, b_1, b_2, b_3) verwendet, wobei

$b_0 \in T \cup \{-\}: \textit{Täter oder 'unbekannt'}$
$b_1 \in W \cup \{-\}: \textit{Waffe oder 'unbekannt'}$
$b_2 \in R \cup \{-\}: \textit{Raum oder 'unbekannt'}$
$b_3 \in S: \textit{Spieler}$

Außerdem existiert das vierstellige Prädikat B welches die oben genannten Argumente besitzt und darüber Auskunft gibt, welcher Spieler in Besitz welcher Karte ist.
Das Zeichen „-“ ist Platzhalter für ein Argument, welches zur Auswertung nicht benötigt wird. So besitzt beispielsweise der Spieler 2 die Karte „Täter 1“, so folgt daraus: $B(1,-,-,2) \Leftrightarrow \textit{wahr}$.

Ein Spiel beginnt immer mit dem Hinzufügen von eindeutigen Informationen wie oben gezeigt. D.h. die eigenen Karten werden zur Menge E hinzugefügt. Die Anzahl der Karten H, die ein Spieler „auf der Hand“ hat, ist $|H|=\lfloor\frac{|T\cup W\cup R|}{|S|}\rfloor$ und es bleiben unter Umständen $|T\cup W\cup R| mod |S|$ Karten übrig. Das bedeutet $|E|\geq|H|$.

Ein mögliches Szenario:
$E=\{(2,-,-,1),(-,3,-,1),(0,-,-,1),(-,-,3,1)\}$ $\Leftrightarrow$

Spieler 1 besitzt die Karte „Täter 2“,
Spieler 1 besitzt die Karte „Waffe 3“,
Spieler 1 besitzt die Karte „Täter 0“,
Spieler 1 besitzt die Karte „Raum 3“.

Damit sind die zunächst notwendigen Mengen und Inhalte formal spezifiziert.

Fallunterscheidungen während dem Spielverlauf

Fall 1: Durch geschicktes Fragen wird direkt eine eindeutige Information erhalten. Also: Spieler s_a zeigt eine Karte. Diese Information (wer welche Karte besitzt) ist eindeutig und kann zur Menge E hinzugefügt werden $E=E\cup\{(b_{0,}b_{1,}b_{2,}s_a)\}$, wobei zwei der ersten drei Argumente - und damit unerheblich sind.
Mögliches Szenario:
$E=E\cup\{(-,2,-,2)\}$ $\Leftrightarrow$ Spieler 2 zeigt die Karte „Waffe 2“

Fall 2: Ein Spieler s_a zeigt einem andern Spieler s_b eine Karte. Sofern keine anderen Informationen vorliegen (mehr dazu später), ist lediglich bekannt, dass sofern $(x_{0,}x_{1,}x_2)$ genannt wurde, $B(x_{0,}-,-,s_a)\vee B(-,x_{1,}-,s_a)\vee B(-,-,x_{2,}s_a)$ gilt. Diese mehrdeutige Information kann vereinfacht in M als $M=M\cup\{(x_{0,}x_{1,}x_{2,}s_a)\}$ vermerkt werden.
Mögliches Szenario:
$(1,2,3,3)\in M$ $\Leftrightarrow$ Spieler 3 hat (einem anderen Spieler) entweder die Karte „Täter 1“, „Waffe 2“, „Raum 3“ gezeigt.

Fall 3: Ein Spieler kann keine der genannten Karten zeigen. Dies ist eine negationale Information und kann in N abgelegt werden. Kann also einer Spieler s_a auf die Anfrage $(x_{0,}x_{1,}x_2)$ von Spieler s_b nicht antworten, bedeutet dies:
$\neg B(x_{0,}-,-,s_a)\wedge\neg B(-,x_{1,}-,s_a)\wedge\neg B(-,-,x_{2,}s_a)$
und $N=N\cup\{(x_{0,}-,-,s_a),(-,x_{1,}-,s_a),(-,-,x_{2,}s_a)\}$ sofern $s_a\neq s_b$ da der fragende nicht auf diese Weise eingetragen werden darf.
Mögliches Szenario:
Spieler 2 kann auf die Frage „Täter 1“, „Waffe 3“, „Raum 2“ nicht antworten
$\Leftrightarrow$ $N\cup\{(1,-,-,2),(-,3-,2),(-,-,2,2)\}$

Substitutions- und Reduktionsmöglichkeiten

Substituieren durch eindeutige Einträge

Sofern gilt: $(x_{0,}x_{1,}x_{2,}s_a)\in E\wedge(y_{0,}y_{1,}y_{2,}s_b)\in M\wedge s_a\neq s_b$ kann y_i ($i\in\{0,1,2\}$) auf - gesetzt werden, sofern $x_i=y_i$ gilt. Beispiel:
$(-,2,-,2)\in E$ und

$(1,2,3,3) \in M$ daraus folgt $M \cup \{(1,-,3,3)\}$
Erklärung: Spieler 3 kann die Karte „Waffe 2“ nicht gezeigt haben, da diese in Besitz von Spieler 2 ist. Es muss sich demnach um eine andere gehandelt haben. Dadurch wurde dieses Argument substituiert. Die neue Information kann M hinzugefügt werden - später wird durch Reduktion der alte Eintrag entfernt.

Entfernung von wertlosen Informationen

Gilt die Bedingung $(x_{0,} x_{1,} x_{2,} s_a) \in E \wedge (y_{0,} y_{1,} y_{2,} s_b) \in M \wedge s_a = s_b$ (also der gleiche Spieler), muss davon ausgegangen werden, dass der Spieler dieser (nun bekannte) Karte vorgezeigt hat. Dies muss zwar nicht der Fall gewesen sein, wäre allerdings möglich, wodurch die Information wertlos wird und aus der Menge M entfernt wird.
$x = (x_{0,} x_{1,} x_{2,} s_v)$ $i \in \{0,1,2\}$
$M = M \setminus (x_{0,} x_{1,} x_{2,} s_v)$ sofern $\exists x \in E : b_i = x_i \wedge b_i \neq - \wedge s_v = b_3$

Substitution durch negationale Informationen

Sofern ein $(x_{0,} x_{1,} x_{2,} s_a) \in M$ existiert, kann jedes x_i ($i \in \{0,1,2\}$) auf - gesetzt werden, sofern ein $(y_{0,} y_{1,} y_{2,} s_b) \in N$ existiert, für das gilt: $x_i = y_i \wedge y_i \neq - \wedge s_a = s_b$ und der Menge M hinzugefügt werden.
Beispiel: $(1,2,3,2) \in M$ und $(-,-,3,2) \in N$ daraus folgt $M = M \cup \{(1,2,-,2)\}$
Erklärung: Sofern die Aussage, dass Spieler 2 nicht in Besitz der Karte „Raum 3“ ist, kann diese auch nicht gezeigt worden sein.

Überführung von M nach E

Alle $(b_{0,} b_{1,} b_{2,} b_3) \in M$ können nach E überführt werden, sofern:
$b_0 \neq -, b_1 = -, b_2 = -$ oder
$b_0 = -, b_1 \neq -, b_2 = -$ oder
$b_0 = -, b_1 = -, b_2 \neq -$ vorliegt.
Über diese neue Information kann gemäß den vorherigen Verfahren weiter substituiert und reduziert werden.

Reduktion über Menge von Einträgen

Innerhalb dieses Papers wird diese Möglichkeit nicht behandelt. Bei 6 Spielern erhält jeder nur 3 Karten. Aufgrund der Aussagen wäre hier ein weiterer Ansatzpunkt zur Reduktion.

Reduktion doppelter und allgemeiner Einträgen in E, M und N

Sei $x : (x_{0,} x_{1,} x_{2,} x_3)$ und $y : (y_{0,} y_{1,} y_{2,} y_3)$
Aus $\exists x \in Z$, $\exists y \in Z$ und $i \in \{0,1,2,3\}$ folgt sofern $x_i = y_i$ gilt: $x = y$
Die Menge Z ist wahlweise E , M oder N .
Damit sind jeweils in den genannten Mengen keine doppelten Einträge.

Außerdem, falls $|x_i = -| > |y_i = -|$ gilt $Z = Z \setminus y$

Erklärung: Aussagen die ungenau (hohe Anzahl von „-“) sind, können genaue (wenige „-“) ersetzen. Diese Ersetzung ist allerdings nur für M interessant.

Lösungssuche

Ausschlussverfahren über eindeutige Informationen

Alle Informationen in der Menge E gehen darüber Auskunft, welcher Spiele in Besitz welcher Karte ist. Also sind die möglichen Gewinn/Lösungskarten

$G=(T \cup W \cup R) \setminus E'$ wobei E' die Menge der eindeutigen Karten sind, welche über die Menge E beschrieben werden. Sofern $|G|=3$ ist eine Lösung gefunden.

Auswertung über negationale Informationen

Sei $A=\{x, y \in N \mid x_0=y_0 \wedge x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \wedge x_3 \neq y_3\}$ dann ist eine Lösungskarte gefunden sofern $|A|=|S|$ gilt.
Erklärung: Wenn alle Spieler eine bestimmte Karte nicht besitzen, ist eine Lösungskarte gefunden. Es existiert also zu einer Karte und zu jedem Spieler einen negativen Eintrag. Damit dies allerdings zu einer Lösung führt, muss entweder zu Beginn des Spiels die Restmenge, also alle Karten die nicht durch E abgedeckt werden zu N hinzugefügt werden oder innerhalb A auf den eigenen Spieler verzichten $A=\{x, y \in N \mid x_0=y_0 \wedge x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \wedge x_3 \neq y_3 \wedge x_3 \neq s_{self}\}$ wobei s_{self} der eigene Spieler ist. In diesem Fall muss auf $|A|=|S|-1$ geprüft werden.

Fazit

Das Verfahren eignet sich mit leichten Modifikationen auch zur Ausführung „von Hand“. Abgesehen von der Spielerzahl werden alle Informationen (auch nachträglich) ausgewertet. Der nächste Schritt wäre ein System, welches die passenden Fragen an andere Spieler generiert.